تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت همسان جانبی به پیچش وارد بر جداره‌ی حفره با طول محدود*

محمدرضا محمودیان(۱) مرتضی اسکندری قادی(۲)

چکیده *در این مقاله یک محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار ایزوتروپ (همسان) جانبی که محور ایزوتروپی (همسانی) آن عمود بر سطح آزاد است و حفره‌ی استوانه‌ای با طول محدود در امتداد محور ایزوتروپی در آن ایجاد شده است، در نظر گرفته شده و پاسخ آن به پیچش معلوم روی دیواره‌ی این استوانه و حول محور استوانه به صورت تحلیلی بررسی می‌شود. بدین منظور معادلات تعادل استاتیکی حاکم بر مسأله در دستگاه مختصات استوانه‌ای نوشته شده و با تقسیم محیط به دو ناحیه و نوشتن معادلات تعادل برای هر ناحیه به صورت مجزا و استفاده از تبدیل کسینوسی فوریه، جابه‌جایی محیط در فضای تبدیل‌یافته ارائه می‌گردد. به کمک قضیه عکس تبدیل انتگرالی جابه‌جایی‌ها در فضای اصلی مسأله حاصل می‌شود. با نوشتن شرایط مرزی و پیوستگی، معادله‌ی انتگرالی کوشی حاکم بر مسأله به دست می‌آید. با حل معادله‌ی انتگرالی حاکم، توابع تنش و تغییر مکان در هر نقطه از محیط به دست می‌آیند. نتایج به دست آمده برای محیط‌های همسان جانبی با نتایج موجود برای محیط‌های همسان مقایسه می‌شود.*

واژه‌های کلیدی پیچش، همسان جانبی، نیم‌فضا، حفره‌ی استوانه‌ای، تبدیل کسینوسی فوریه، معادلات انتگرالی.

Analytical Solution for a Transversely Isotropic Half-Space due to Torsion on the Wall of a Finite Length Cylindrical Cavity

M.R Mahmoodian M. Eskandari-Ghadi

Abstract *In this article, a transversely isotropic linear elastic half-space with depth wise isotropy axis of material containing a cylindrical cavity of finite length is considered to be under the effect of an arbitrary torsion force applied on the wall of the cavity. To this end, the equation of equilibrium has been written in a cylindrical coordinate system, by dividing the involved domain to two regions and considering the equation of equilibrium in each region and by means of Fourier cosine integral transforms, the non-zero displacement component is obtained in the transformed domain. With the aid of the inversion theorem of the Fourier cosine integral transform, the displacements are determined in the real domain. By writing boundary and continuity conditions, a governing generalized Cauchy singular integral equation is obtained. By solving the governing integral equation, the shear stress and the torsional displacement are obtained for any point. The degenerated results for isotropic media are compared with existing results reported in the literature, where there exists an excellent agreement. The results of the paper may be used as the benchmark for the related research in the transversely isotropic media***.**

Key Words Torsion, Transversely isotropic, Half-space, Cylindrical cavity, Fourier cosine transform, Integral equations.

---

* تاریخ تصویب مقاله ۸۹/۱۱/۰۲ و تاریخ دریافت نسخه نهایی اصلاح شده ۹۰/۸/۱۰

(۱) دانشجوی دکترا مهندسی عمران- سازه، گروه مهندسی عمران، دانشکده فنی و مهندسی، دانشگاه علم و فرهنگ.

(۲) نویسنده‌ی مسؤول: دانشیار دانشکده مهندسی عمران، پردیس دانشکده‌های فنی، دانشگاه تهران.

مقدمه

مسأله‌ی انتشار امواج در یک محیط ناشی از بارگذاری خارجی و تحلیل پاسخ یک محیط الاستیک به اعمال تنش بر روی جدار حفره‌ای در داخل آن از جمله مباحثی است که در قرن گذشته توجه بسیاری از محققان و مهندسان ریاضیات کاربردی و مکانیک مهندسی را به خود جلب کرده است. مسأله‌ی بررسی میزان تنش و کرنش به وجود آمده در یک محیط نیمه‌بی‌نهایت تحت اثر نیروهای ناشی از شمع‌های کوتاه یا بلند نیازمند به بررسی اندرکنش شمع و محیط است و این خود نیاز به تحلیل محیط نیمه بی‌نهایت تحت اثر نیروهای ناشی از شمع مؤثر بر فصل مشترک جدار شمع و محیط دارد.

وسترگارد، اولین بار در سال ۱۹۴۱، یک محیط بی‌نهایت با رفتار ارتجاعی با یک حفره‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت را در نظر گرفت و پاسخ استاتیکی آن به فشار شعاعی روی طول محدودی از دیواره‌ی حفره را به دست آورد [15]. آنالیز سه‌بعدی حفره‌ی استوانه‌ای توسط گرین و زرنا در سال ۱۹٤٤ انجام گرفت [3]. در سال ۱۹۵۲، سلبرگ به تحلیل یک محیط ارتجاعی تحت اثر فشار آنی بر سطح داخلی حفره پرداخت [12]. بعدها جردن در سال ۱۹٦۲ مسأله‌ی مشابه را با اعمال فشار دینامیکی خطی بر روی قسمتی از دیواره‌ی حفره حل کرد [4]. در سال ۱۹۸۰، پارنز به مطالعه‌ی اعمال تنش پیچشی خطی متحرک که به صورت دایره‌ای در امتداد محور داخلی حفره‌ی استوانه‌ای، واقع در یک محیط الاستیک بی‌نهایت در حرکت بود، پرداخت [10]. هم‌چنین اسنیدون در سال ۱۹۵۲ و کل و هاث در سال ۱۹۵۸، حالت دو بعدی مسأله‌ی پارنز را مورد بررسی قرار داده بودند [1,14]. پارنز در سال ۱۹۸۲ به بررسی اعمال فشار شعاعی و تنش پیچش خطی، به طور مجزا، بر روی دیواره‌ی حفره‌ی نامحدود در یک محیط بی‌نهایت الاستیک پرداخت و نتایج عددی برآورد مؤلفه‌های تنش و جابه‌جایی در نزدیکی نیرو و در طول حفره را ارائه نمود [7]. پارنز در سال ۱۹۸۳ مسأله‌ی پیچش خود را در حالت دینامیکی حل کرد و نتایج آن را با حالت استاتیکی قبلی، مقایسه نمود [8]. در این مقاله جابه‌جایی‌ها و تنش‌های حاصل از اعمال فشار خطی بر جداره‌ی حفره‌ی استوانه‌ای به صورت انتگرال‌های بی‌نهایت بیان شده‌اند.

با توجه به بررسی‌های انجام شده در نزدیکی اعمال نیروی متمرکز، همگرایی انتگرال‌ها به سرعت کاهش می‌یابد و نقاط تکین خود را نشان می‌دهند. از این‌رو، نتایج در نقاطی دور از نقاط تکین دارای دقت خوبی می‌باشند. این محقق در سال ۱۹۸٦ پاسخ محیط الاستیک به فشار حلقه‌ای هارمونیک، مؤثر بر سطح حفره‌ی استوانه‌ای با طول بی‌نهایت، را به دست آورد [11]. وجود حفره با طول محدود در محیط‌های نیمه‌بی‌نهایت، به علت وجود سختی محیط در کف حفره، باعث دشواری تحلیل مسأله می‌گردد. از این‌رو، در اکثر تحقیقات اثر اعمال نیرو بر جداره‌ی حفره‌ی نامحدود در یک محیط مورد مطالعه قرار گرفته است. از آن‌جا که در بسیاری از کاربردهای مهندسی از جمله حفر فونداسیون‌ها، مطالعات ژئوتکنیکی در محل و مدل کردن گسترش تنش وارد بر دیواره‌ی حفره، با حفره‌ای با طول محدود سر و کار داریم؛ مطالعه‌ی اثر نیرو بر حفره با طول محدود مهم می‌باشد.

پک و عابدزاده در سال ۱۹۹۲ اثر تنش پیچشی بر دیواره‌ی حفره‌ای محدود در یک محیط همگن و همسان را با دقت مورد بررسی قرار داده‌اند [6]. در حال حاضر با توجه به استفاده‌ی روزافزون از مواد ناهمسان نیاز به تحقیقات در زمینه‌ی انتشار امواج در این محیط‌ها بیشتر احساس می‌شود. برای مثال، مواد کامپوزیت که در سال‌های اخیر در زمینه‌ی علوم مهندسی کاربرد گسترده‌ای یافته‌اند، دارای خاصیت ناهمسانی می‌باشند. از سوی دیگر در زمین‌هایی که خاک تحت اثر نیروی ثقلی رسوب کرده است و نهشته‌های طبیعی سربارشده روی هم تشکیل داده است، خاصیت ناهمسانی وجود دارد؛ اما با توجه به ملاحظات کاربردی در زمینه‌ی مهندسی، محیط‌های

ناهمسان معمولاً به صورت همسان جانبی و یا ارتوتروپیک مدل‌سازی می‌شوند [۱۶]. در حالت کلی در صورتی که در یک محیط سه‌بعدی، فرض همسان بودن ماده کنار گذاشته شود، تحلیل مسأله پیچیده و طولانی خواهد شد.

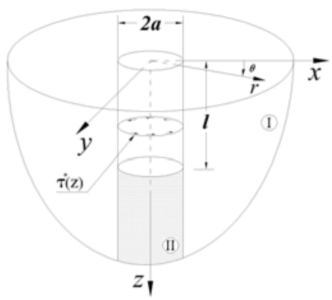
در این مقاله یک محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار همسان جانبی که حفره‌ی استوانه‌ای با طول محدود در امتداد محور ایزوتروپی در آن ایجاد شده، در نظر گرفته شده است و پاسخ آن به پیچش معلوم روی دیواره‌ی این استوانه و حول محور استوانه به صورت تحلیلی بررسی می‌شود. بدین منظور معادلات حرکت حاکم بر مسأله در دستگاه مختصات استوانه‌ای نوشته می‌شود. با تقسیم محیط به دو ناحیه و نوشتن معادلات حرکت برای هر ناحیه به صورت مجزا و برقراری شرایط پیوستگی و مرزی پاسخ محیط تعیین می‌شود. در روش حل از تبدیل کسینوسی فوریه استفاده شده است؛ لذا جابه‌جایی‌های محیط در فضای تبدیل‌یافته به دست می‌آیند. به کمک قضیه‌ی عکس تبدیل انتگرالی، جابه‌جایی‌ها در فضای اصلی مسأله حاصل می‌شود. ثابت‌های انتگرال‌گیری با معرفی یک تابع میانی و ارضای شرایط پیوستگی و سازگاری بین دو ناحیه در فضای واقعی به دست می‌آیند. با نوشتن شرایط سازگاری، معادله انتگرالی کوشی حاکم بر تابع میانی مسأله حاصل می‌شود. با حل معادله‌ی انتگرالی کوشی، جابه‌جایی‌ها به دست می آید و با استفاده از معادلات رفتاری تنش‌ها در محیط همسان جانبی به دست می‌آیند. با برآورد عددی نشان داده می‌شود که جواب‌های مسأله در حالت ساده‌تر، مربوط به محیط‌های همسان، بر جواب‌های موجود منطبق است که دلالت بر صحت و دقت نتایج دارد.

معادلات حاکم بر مسأله مقدار مرزی

یک محیط نیمه بی‌نهایت ارتجاعی، همگن و با رفتار همسان جانبی با یک حفره‌ی استوانه‌ای به عمق l و شعاع a مطابق شکل (۱) در نظر گرفته می‌شود. دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) را مطابق این شکل در نظر می‌گیریم. محور ایزوتروپی محیط در امتداد محور z و در نتیجه عمود بر سطح نیم فضا در نظر گرفته می‌شود. دیواره حفره در فاصله‌ی $0<z<l$ تحت اثر تنش برشی معلوم $\tau^*(z)$ قرار دارد. نتیجه‌ی این تنش برشی گشتاور معلوم $2\pi a^2\int_0^l \tau^*(z)\,dz$ می‌باشد. به منظور حل مسأله، محیط را به دو ناحیه‌ی R_1 و R_2 به صورت ذیل تقسیم می‌کنیم (شکل ۱):

$$R_1=\left\{(r,\theta,z)\,\middle|\, r>a, 0<\theta<2\pi, z>0\right\} \qquad (۱)$$

$$R_2=\left\{(r,\theta,z)\,\middle|\, r<a, 0<\theta<2\pi, z>l\right\} \qquad (۲)$$



شکل ۱ حفره‌ی استوانه‌ای در محیط نیمه بی‌نهایت

با توجه به این تقسیم‌بندی، شرایط مرزی مسأله به صورت زیرمی‌باشد:

$$\tau_{r\theta 1}(a,z)=\tau^*(z), \qquad 0<z<l \qquad (۳)$$

$$\tau_{z\theta 1}(r,0)=0, \qquad r>a \qquad (٤)$$

$$\tau_{z\theta 2}(r,l)=0, \qquad r<a \qquad (٥)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(r,0)=0, \qquad r>a \qquad (٦)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(r,l)=0, \qquad r<a \qquad (٧)$$

و شرایط در بی‌نهایت به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_i(r,z) \to 0, \qquad \sqrt{(r^2+z^2)} \to \infty, \qquad i=1,2 \qquad (۸)$$

در این روابط اندیس ۱ مربوط بـه ناحیـه‌ی R_1 و اندیس ۲ مربوط به ناحیه R_2 می‌باشـد. بـه عـلاوه در این روابط $\tau_{r\theta}$ و $\tau_{z\theta}$ تنش‌های برشی و تنها تنش‌هـای غیر صفر محیط هستند و هم‌چنین $u = u_\theta$ تغییـرمکـان در امتداد θ در دستگاه مختصات معرفـی شـده اسـت. طبیعت مسأله چنان است کـه $u_r = u_z = 0$ مـی‌باشـد. روابط بین تنش ـ تغییرمکان برای تنش‌های غیـر صـفر به صورت زیر می‌باشند [5]:

$$\tau_{r\theta} = \mu(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}) = \mu r \frac{\partial}{\partial r}(\frac{u}{r}) \qquad (۹)$$

$$\tau_{z\theta} = \mu'(\frac{\partial u}{\partial z}) \qquad (۱۰)$$

که در آن μ مدول برشـی در صـفحه ایزوتروپـی و μ' مدول برشی در صـفحه عمـود بـر صـفحه ایزوتروپـی می‌باشد. معادله‌ی تعادل بر حسب تغییـرمکـان در هـر ناحیه به صورت زیر در می‌آید [5]:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{u_1}{r^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0, \qquad r > a,\ z > 0 \qquad (۱۱)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{u_2}{r^2} + \alpha^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial z^2} = 0, \qquad r < a,\ z > l \qquad (۱۲)$$

که در آن $\alpha^2 = \frac{\mu'}{\mu}$، نسبت سختی برشی در صـفحه‌ی ایزوتروپی بـه سـختی برشـی در صـفحه‌ی عمـود بـر صـفحه‌ی ایزوتروپـی مـی‌باشـد. پیوسـتگی تـنش و تغییرمکان در فصل مشترک ناحیـه‌هـای R_1 و R_2 بـه صورت زیر می‌باشند:

$$\tau_{r\theta 1}(a,z) = \tau_{r\theta 2}(a,z), \qquad z \ge l \qquad (۱۳)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(a,z) = \frac{\partial u_2}{\partial z}(a,z), \qquad z \ge l \qquad (۱٤)$$

رابطـه‌ی (١٤) نتیجـه‌ی پیوسـتگی تـنش برشـی $\tau_{z\theta 1}(a,z) = \tau_{z\theta 2}(a,z)$ برای $z \ge l$ است.

حل معادلات حاکم

با توجه به دامنـه‌ی مسـأله بـرای تبـدیل معـادلات بـا مشـتقات جزئـی (۱۲ و ۱۱) بـه معـادلات دیفرانسـیل معمولی از تبدیل کسینوسـی فوریـه اسـتفاده مـی‌کنـیم [13]. از آن‌جایی که دامنه‌ی R_1 از $z=0$ تا بی‌نهایـت و دامنـه‌ی R_2 از $z=l$ تـا بـی‌نهایـت اسـت، تبـدیل کسینوسی فوریه توابع در این دامنه‌ها متفاوت اسـت و به ترتیب به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\tilde{f}_1(r,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty f_1(r,z)\cos(\xi z)\,dz \qquad (۱۵)$$

$$\tilde{f}_2(r,\xi) = \frac{2}{\pi}\int_l^\infty f_2(r,z-l)\cos\xi(z-l)\,dz \qquad (۱٦)$$

که در آن f_1 و f_2 توابع دل‌خواه به ترتیب با دامنه‌های R_1 و R_2 هستند و $\tilde{f}_1$ و $\tilde{f}_2$ تبدیل فوریه کسینوسـی آنها می‌باشند. بنابراین، تبدیل کسینوسی فوریه معادلات (۱۲ و ۱۱) به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{d^2\tilde{u}_i}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\tilde{u}_i}{dr} - (\alpha^2\xi^2 + \frac{1}{r^2})\,\tilde{u}_i = 0, \qquad i=1,2 \qquad (۱۷)$$

که در آن از شرایط (۸-٦) استفاده شده است. با تغییـر متغیر $r\xi = \zeta$ و $\alpha\zeta = \bar{\zeta}$ معادلـه‌ی (۱۷) بـه معادلـه‌ی بسل اصلاح‌شده‌ی مرتبـه‌ی اول در مـی‌آیـد و جـواب آن‌ها بر حسب r و ξ در حالت کلی به صورت:

$$\tilde{u}_i(r,\xi) = A_i(\xi)K_1(\alpha\xi r) + B_i(\xi)I_1(\alpha\xi r), \qquad i = 1,2 \qquad (۱۸)$$

می‌باشد که در آن $I_1(x)$ و $K_1(x)$ توابع بسل اصلاح‌شده‌ی نوع اول و دوم از مرتبه‌ی یک می‌باشند. در ناحیه‌ی R_1 هنگامی که $r\to\infty$، I_1 به سمت بی‌نهایت میل می‌کند. به منظور داشتن جواب قابل قبول $B_1(\xi)$ صفر می‌باشد. هم‌چنین در ناحیه‌ی R_2 هنگامی که $r\to 0$، K_1 به بی‌نهایت میل می‌کند، در این صورت $A_2(\xi)$، صفر می‌باشد. با استفاده از قضیه‌ی عکس تبدیل کسینوسی فوریه جابه‌جایی‌ها در دو ناحیه به ترتیب به صورت:

$$u_1(r,z)=\int_0^{\infty}A_1(\xi)K_1(\alpha\xi r)\times\cos(\xi z)\,d\xi,\qquad r\geq a, z\geq 0 \tag{۱۹}$$

$$u_2(r,z)=\int_0^{\infty}B_2(\xi)I_1(\alpha\xi r)\times\cos\xi(z-l)\,d\xi,\qquad r\leq a, z\geq l \tag{۲۰}$$

به دست می‌آیند. با در نظر گرفتن شرایط پیوستگی(۱۳) روی مرز استوانه‌ای شکل در ناحیه R_1 می توان $\tau_{r\theta 1}$ را به صورت:

$$\lim_{r\to a^+}\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_1}{r}\right)=\mu\chi(z)=\begin{cases}\tau^*(z) & 0<z<l\\ \tau(z) & z\geq l\end{cases} \tag{۲۱}$$

و تابع $\tau_{r\theta 2}$ در مرز ناحیه R_2 را به شکل:

$$\lim_{r\to a^-}\mu r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_2}{r}\right)=\mu\chi(z),\qquad z\geq l \tag{۲۲}$$

نوشت. همان طور که مشاهده می‌شود تابع $\chi(z)$ معرف تابع کرنش برشی در صفحات موازی صفحه‌ی $r-\theta$ در $r=a$ بر حسب عمق می‌باشد. با جاگذاری روابط (۲۰ و ۱۹) در (۲۲ و ۲۱) و استفاده از روابط مشتق توابع بسل اصلاح شده و هم‌چنین عکس تبدیل کسینوسی فوریه ضرایب $A_1(\xi)$ و $B_2(\xi)$ به صورت ذیل به دست می‌آیند:

$$A_1(\xi)=\frac{-2}{\pi\alpha\xi K_2(\alpha\xi a)}\int_0^{\infty}\chi(z)\cos(\xi z)\,dz \tag{۲۳}$$

$$B_2(\xi)=\frac{2}{\pi\alpha\xi I_2(\alpha\xi a)}\int_l^{\infty}\chi(z)\cos\xi(z-l)\,dz \tag{۲۴}$$

با جاگذاری روابط (۲۴ و ۲۳) به ترتیب در روابط (۲۰ و ۱۹)، میزان جابه‌جایی در دو ناحیه بر حسب تابع مجهول $\chi(z)$ به دست می‌آید. جابه‌جایی‌های u_1 و u_2 باید شرط پیوستگی (۱۴) را ارضا نمایند. با مشتق‌گیری از u_1 و u_2 نسبت به z داریم:

$$\frac{\partial u_1}{\partial z}(r,z)=\frac{1}{\alpha\pi}\int_0^{\infty}(\phi_k(r,z-\zeta)+\phi_k(r,z+\zeta))\times\chi(\zeta)\,d\zeta,\qquad r>a, z\geq 0 \tag{۲۵}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial z}(r,z)=\frac{-1}{\alpha\pi}\int_l^{\infty}(\phi_I(r,z-\zeta)+\phi_I(r,z+\zeta-2l))\times\chi(\zeta)\,d\zeta,\qquad r<a, z\geq l \tag{۲۶}$$

به طوری که

$$\phi_k(r,d)=\int_0^{\infty}\frac{K_1(\alpha\xi r)}{K_2(\alpha\xi a)}\sin(\xi d)\,d\xi \tag{۲۷}$$

$$\phi_I(r,d)=\int_0^{\infty}\frac{I_1(\alpha\xi r)}{I_2(\alpha\xi a)}\sin(\xi d)\,d\xi \tag{۲۸}$$

و با جاگذاری (۲۶ و ۲۵) در شرط پیوستگی (۱۴)، این شرط به صورت معادله انتگرالی زیر برای تعیین $\tau(z)$ با $z\geq l$ به دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\int_l^{\infty}(\phi_I(a^-,z-\zeta)+\phi_I(a^-,z+\zeta-2l))\tau(\zeta)\,d\zeta\\&+\int_l^{\infty}(\phi_k(a^+,z-\zeta)+\phi_k(a^+,z+\zeta))\tau(\zeta)\,d\zeta=\\&-\int_0^{l}(\phi_k(a^+,z-\zeta)+\phi_k(a^+,z+\zeta))\tau^*(\zeta)\,d\zeta,\qquad z\geq l\end{aligned} \tag{۲۹}$$

معادله‌ی (۲۹)، معادله انتگرالی تعمیم‌یافته‌ی کوشی نامیده می‌شود.

حل معادله‌ی انتگرالی حاکم

همان‌طور که در معادله‌ی (۲۹) مشاهده می‌شود توابع ϕ_k و ϕ_I باید برای $r \to a$ بررسی شوند. با محاسبه‌ی $\phi_k(a^+,d)$ و $\phi_I(a^-,d)$ و تعریف متغیرهای بی‌بعد $\hat{\zeta}=\frac{\zeta}{a}$ ، $\hat{l}=\frac{l}{a}$ و $\hat{z}=\frac{z}{a}$ معادله‌ی (۲۹) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\int_{\hat{l}}^{\infty}[\frac{2}{\hat{\zeta}-\hat{z}}-\frac{1}{\hat{\zeta}+\hat{z}-2\hat{l}}-\frac{1}{\hat{\zeta}+\hat{z}}]\hat{\tau}(\hat{\zeta})d\hat{\zeta} + \int_{\hat{l}}^{\infty}[k_1(\hat{\zeta}-\hat{z})-k_1(\hat{\zeta}+\hat{z}-2\hat{l})+k_2(\hat{\zeta}-\hat{z}) - k_2(\hat{\zeta}+\hat{z})]\hat{\tau}(\hat{\zeta})d\hat{\zeta}=f(\hat{z}), \qquad \hat{z}\geq\hat{l} \qquad (۳۰)$$

به طوری که

$$\hat{\tau}(\hat{z})=\tau(z) \qquad (۳۱)$$

$$k_1(d)=\int_0^{\infty}(\frac{I_1(\alpha\xi)}{I_2(\alpha\xi)}-1)\sin(\xi d)\,d\xi \qquad (۳۲)$$

$$k_2(d)=\int_0^{\infty}(\frac{K_1(\alpha\xi)}{K_2(\alpha\xi)}-1)\sin(\xi d)\,d\xi \qquad (۳۳)$$

$$f(\hat{z})=\int_0^{\hat{l}} a[\phi_k(a^+,\hat{z}a-\hat{\zeta}a) + \phi_k(a^+,\hat{z}a+\hat{\zeta}a)]\tau^*(\hat{\zeta}a)\,d\hat{\zeta} \qquad (۳۴)$$

با حل معادله‌ی انتگرالی (۳۰) تنش‌های برشی روی مرز $r=a$ و $z \geq l$ به دست می‌آیند. برای حل معادله‌ی انتگرالی (۳۰) از تغییر متغیرهای زیر به منظور بی‌بعد کردن استفاده می‌کنیم:

$$v=\hat{l}/\hat{\zeta} \quad , \quad x=\hat{l}/\hat{z} \qquad (۳۵)$$

به کمک رابطه‌ی (۳۵) ، معادله‌ی (۳۰) را می‌توان به فرم

$$\int_0^1 G(x,v)\hat{\tau}(\hat{l}/v)\,dv=g(x), \qquad 0\leq x\leq 1 \qquad (۳۶)$$

نوشت، به طوری که:

$$G(x,v)=[\frac{2}{x-v}-\frac{2x-1}{v+x-2vx}+\frac{1}{x+v}]+(\frac{\hat{l}}{v^2})[k_1(\frac{\hat{l}}{v}-\frac{\hat{l}}{x}) - k_1(\frac{\hat{l}}{v}+\frac{\hat{l}}{x}-2\hat{l})+k_2(\frac{\hat{l}}{v}-\frac{\hat{l}}{x})-k_2(\frac{\hat{l}}{v}+\frac{\hat{l}}{x})] \qquad (۳۷)$$

و

$$g(x)=f(\hat{l}/x) \qquad (۳۸)$$

با توسیع تابع $\hat{\tau}(\hat{l}/v)$ به صورت زوج نسبت به مبدأ می‌توان رابطه‌ی (۳۶) را به صورت زیر نوشت:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} G(|x|,|v|)\,\hat{\tau}(\hat{l}/|v|)\,dv=g(|x|), \qquad -1\leq x\leq 1 \qquad (۳۹)$$

با بررسی رفتار تابع $\hat{\tau}(\hat{z})$ در نقاط تکین، می‌توان تابع را در فاصله‌ی $[-1,1]$ به صورت:

$$\hat{\tau}(\hat{l}/x)=T(x)/(1-x^2)^{\frac{1}{3}} \qquad (۴۰)$$

نوشت که در آن تابع مجهول $T(x)$ یک تابع هموار در فاصله‌ی $-1 \leq x \leq 1$ است. با در نظر گرفتن رابطه‌ی (۴۰) انتگرال (۳۹) به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} G(|x|,|v|)\frac{T(|v|)}{(1-v^2)^{\frac{1}{3}}}\,dv=g(|x|), \qquad -1\leq x\leq 1 \qquad (۴۱)$$

با در نظر گرفتن نقاط تکین انتگرال فوق در محدوده‌ی $[-1,1]$ و استفاده از بسط به صورت چند جمله‌ای ژاکوبی $\{P_{2n}^{(\alpha,\beta)}(x)\}$ با $\alpha=\beta=\frac{1}{3}$ برای تابع تکین موجود در انتگرال و نیز زوج بودن تابع $T(x)$ برای $-1 \leq x \leq 1$، معادله‌ی انتگرالی به صورت دستگاه معادلات زیر نوشته می‌شود [2]:

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2N} W_k G(|x_j|,|v_k|) \times T(|v_k|) = g(|x_j|), \qquad j=1,\ldots,2N-1 \qquad (۴۲)$$

که در آن از روش تجمع محلی (Collocation Method) [۱۷] برای نقاط تکین تابع زیر علامت انتگرال در (۴۱) استفاده شده است. در رابطه‌ی (۴۲):

$$W_k = \frac{-(4N+\alpha+\beta+2)}{(2N+1)!(2N+\alpha+\beta+1)} \times \frac{\Gamma(2N+\alpha+1)\Gamma(2N+\beta+1)2^{\alpha+\beta}}{\Gamma(2N+\alpha+\beta+1)P_{2N+1}^{(\alpha,\beta)}(v_k)dP_{2N}^{(\alpha,\beta)}(v_k)/dv} \qquad (۴۳)$$

و v_k, x_j ریشه های چند جمله‌ای ژاکوبی

$$P_{2N-1}^{(\frac{2}{3},\frac{2}{3})}(x_j)=0, \qquad j=1,\ldots,2N-1 \qquad (۴۴)$$

$$P_{2N}^{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3})}(v_k)=0, \qquad k=1,\ldots,2N \qquad (۴۵)$$

می‌باشند. از آن‌جایی که x_j و v_k نسبت به مبدأ متقارن هستند، دستگاه معادلات (۴۲) برای $j=1,\ldots,N$ به صورت

$$\sum_{k=1}^{N} W_k G(x_j,v_k)T(v_k)=g(x_j), \qquad j=1,\ldots,N \qquad (۴۶)$$

و برای $x_N=0$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sum_{k=1}^{N} W_k \frac{T(v_k)}{(v_k)^2}=0 \qquad (۴۷)$$

رابطه‌ی (۴۶) شامل N معادله می‌باشد که با حل هم‌زمان آن‌ها $T(v_k)$ برای $k=1,\ldots,N$ به دست می‌آید. با توجه به رابطه بین $T(x)$ و $\hat{\tau}(\hat{z})$ و هم‌چنین روابط (۲۴ و ۲۳ و ۲۰ و ۱۹) پاسخ محیط به تنش پیچشی معلوم τ^* قابل محاسبه می‌باشد. در بسیاری از کاربردهای مهندسی تنش و جابه‌جایی روی دیواره‌ی حفره مورد نیاز است، از این‌رو، با استفاده از رابطه (۱۹) می‌توان جابه‌جایی را در $r=a$ به صورت زیر محاسبه نمود:

$$u(a,z)=\frac{a}{\alpha\pi}\{Q(\hat{z}) + \int_{\hat{1}}^{\infty}[q_2(\hat{z}+\hat{\zeta})+q_2(\hat{z}-\hat{\zeta})]\hat{\tau}(\hat{\zeta})\,d\hat{\zeta} \qquad (۴۸)$$

به طوری که:

$$q_2(d)=-\int_0^{\infty}\frac{K_1(\alpha\xi)}{\xi K_2(\alpha\xi)}\cos(\xi d)\,d\xi \qquad (۴۹)$$

$$Q(\hat{z})=\int_0^{\hat{1}}[q_2(\hat{z}+\hat{\zeta})+q_2(\hat{z}-\hat{\zeta})]\hat{\tau}^*(\hat{\zeta})\,d\hat{\zeta} \qquad (۵۰)$$

$$\hat{\tau}^*(\hat{z})=\tau^*(z) \qquad (۵۱)$$

$q_2(d)$ به صورت یک انتگرال محیطی قابل حل می‌باشد [6]. حل عددی رابطه‌ی (۴۸) با استفاده از روش تجمع محلی به صورت

$$\frac{u(a,z)}{a}=\frac{1}{\alpha\pi}\{Q(\hat{z})+\sum_{k=1}^{N}W_k[q_2(\hat{z}+\frac{\hat{1}}{v_k}) + q_2(\hat{z}-\frac{\hat{1}}{v_k})](\frac{\hat{1}}{v_k^{2}})T(v_k)\}, \qquad \hat{z}\le\hat{1} \qquad (۵۲)$$

می‌باشد. می‌توان نشان داد تنش برشی $\tau(a,z)$ روی مرز $r=a$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\tau_{z\theta}(a,z)}{\mu}=\frac{\alpha}{\pi}\{f(\hat{z}) + \int_{\hat{1}}^{\infty}[\frac{1}{\hat{z}-\hat{\zeta}}+\frac{1}{\hat{z}+\hat{\zeta}}+k_2(\hat{z}-\hat{\zeta})+k_2(\hat{z}+\hat{\zeta})] \times\hat{\tau}(\hat{\zeta})d\hat{\zeta}\}, \qquad \hat{z}\le\hat{1} \qquad (۵۳)$$

با استفاده از روش تجمع محلی برای حل انتگرال (۵۳) می‌توان رابطه‌ی اخیر را به صورت عددی

$$\frac{\tau_{z\theta}(a,z)}{\mu}=\frac{\alpha}{\pi}\{f(\hat{z})+\sum_{k=1}^{N}W_k T(v_k)\times[\frac{1}{v_k-\hat{l}/\hat{z}}-\frac{1}{v_k+\hat{l}/\hat{z}}+\frac{\hat{l}}{{v_k}^2}(k_2(\hat{z}-\frac{\hat{l}}{v_k})+k_2(\hat{z}+\frac{\hat{l}}{v_k}))]\} \qquad (٥٤)$$

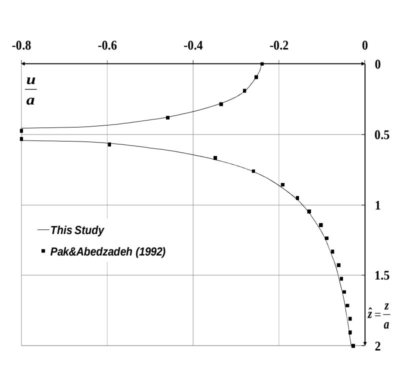
محاسبه نمود.

برآورد عددی

به منظور بررسی پاسخ محیط، تنش پیچشی متمرکز و معلوم $\tau^*(z)$ را در عمق s به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

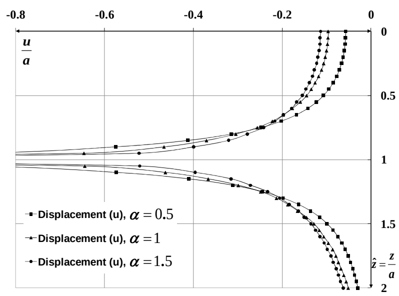
$$\tau^*(z)=a\delta(z-s), \qquad 0<s<1 \qquad (٥٥)$$

در رابطه‌ی فوق $\delta(x)$ تابع دلتای دیراک می‌باشد. تغییرمکان ناشی از نیروی پیچشی $\tau^*(z)$ روی مرز $r=a$ در عمق $s=0.5$ برای مصالح همسان در شکل (۲) نشان داده شده است. این تغییرمکان مطابق انتظار در $z=s$ بی‌نهایت می‌شود و با دور شدن از $z=s$ به سرعت کاهش می‌یابد. در این شکل نتایج حاصل از این مطالعه با نتایج ارائه‌شده توسط پک و عابدزاده (۱۹۹۲) مقایسه شده است. تطابق عالی جواب‌ها معرف صحت نتایج به دست آمده می‌باشد.

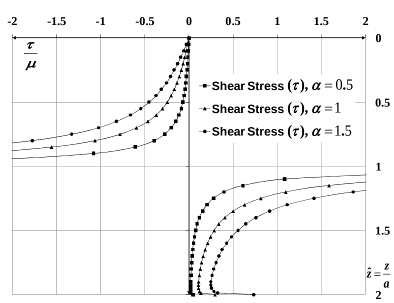


شکل ۲ تغییرمکان دیواره‌ی حفره در مصالح همسان ($\hat{l}=2$)

برای بررسی اثر میزان ناهمسانی به رفتار محیط، علاوه بر محیط همسان، محیط‌های همسان جانبی با ضرایب $\alpha=0.5$ و $\alpha=1.5$ در نظر گرفته می‌شوند. برای محیط همسان نیز $\alpha=1$ می‌باشد. شکل (۳) میزان جابه‌جایی دیواره‌ی حفره بر اثر اعمال تنش پیچشی $\tau^*(z)$ مطابق (۵۵) روی مرز $r=a$ و در عمق $s=1$ را نشان می‌دهد. میزان تأثیر ناهمسانی مصالح بر جابه‌جایی به وجود آمده بر دیواره‌ی حفره به طور واضح مشاهده می‌شود.



شکل ۳ تغییر مکان دیواره‌ی حفره مصالح همسان و همسان‌جانبی($\hat{l}=2$)



شکل ٤ تنش برشی دیواره حفره مصالح همسان و همسان‌جانبی($\hat{l}=2$)

میزان تنش به وجود آمده در جداره‌ی حفره بر اثر اعمال تنش پیچشی $\tau^*(z)$ روی مرز $r=a$ و در عمق $s=1$، در شکل (٤) مشاهد می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تنش برشی به وجود آمده در دیواره‌ی حفره در محل اعمال تنش پیچشی، برای همه‌ی مصالح، به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، و با دور شدن از محل اعمال تنش پیچشی، مصالح رفتار متفاوتی از

خود نشان می‌دهند و با نزدیک شدن به مرز $z=0$ میزان تنش برشی برای هر دو مصالح به سمت صفر میل می‌کند. میزان تنش برشی روی دیواره‌ی حفره برای مصالح متفاوت، در مرزهای $z=0$، $z=\hat{l}$ و در محل اعمال گشتاور پیچشی یکسان و در سایر قسمت-ها متفاوت می‌باشد. تفاوت تنش برشی در محیط‌های متفاوت مطابق شکل (٤) به معنی اهمیت در نظر گرفتن اثر ناایزوتروپی محیط در بررسی این رفتار می‌باشد.

نتیجه‌گیری

در این مقاله یک روش تحلیلی برای به دست آوردن پاسخ محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار همسان جانبی به پیچش وارد بر جدار حفره با طول محدود ارائه شده است. با تقسیم محیط به دو ناحیه‌ی R_1 و R_2 و استفاده از تبدیل کسینوسی فوریه، معادلات تعادل در دستگاه مختصات استوانه‌ای (r,θ,z) برای هر ناحیه به معادلات دیفرانسیل معمولی بر حسب عمق تبدیل شده، به طوری که با حل آنها، شرایط پیوستگی دو ناحیه به معادله‌ی انتگرالی کوشی منجر شده است. با حل معادله‌ی انتگرالی کوشی با استفاده از بسط تابع مجهول به چندجمله‌ای ژاکوبی و نیز استفاده از روش تجمع محلی، یک دستگاه N معادله، N مجهولی حاصل گردیده که با حل آن‌ها تابع تنش برشی و سپس تابع تغییر مکان روی دیواره‌ی حفره در فاصله‌ی $0 \le z \le l$ به صورت انتگرال‌های خطی نیمه‌متناهی به دست آمده است. توابع زیر علامت انتگرالی به علت وجود توابع بسل اصلاح شده، توابع نوسانی می‌باشند، که در بی‌نهایت به سمت صفر میل می‌کنند؛ اما روند همگرایی این توابع در بی‌نهایت کند است. بنابراین، یکی از موارد مهم در برآورد انتگرال‌ها در این مقاله تعیین بی‌نهایت فیزیکی است. برای بررسی نتایج، تنش برشی معلوم روی دیواره‌ی حفره در عمق s فرض شده است و در نتیجه توابع تغییرمکان و تنش به صورت توابعی از s محاسبه گردیده‌اند. به منظور نشان دادن تأثیر میزان ناهمسانی مصالح بر پاسخ محیط، نتایج مختلف برای تغییرمکان و تنش دیواره‌ی حفره ارائه گردیده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود به علت تفاوت‌های موجود بین نتایج مصالح همسان و همسان جانبی، لازم است در کاربردهای مهندسی برای نزدیک بودن پاسخ به واقعیت، مصالح به درستی معرفی گردند.

مراجع

1. Cole J. and Huth, J., "Stresses produced in a half plane by moving loads ", *J. Appl. Mech*., Vol. 25, pp. 443-436, (1958).
2. Erdogan, F., "Mixed boundary-value problems in mechanics ", *Mech. Today*, Vol. 4, pp. 1-86, (1979).
3. Green, A. E. and Zerna, W., "*Theoretical elasticity* ", Cambridge University press, London, (1944).
4. Jordan, D.W., "The stress wave from a finite cylindrical explosive source ", *J. Math. Mech*,. Vol. 11, pp. 503-551, (1962).
5. Lekhnitskii, S.G., "*Theory of elasticity of an anisotropic body "*, Mir Publisher, Moscow, (1981).
6. Pak, R.Y.S. and Abedzadeh, F., "Torsional traction on an open finite cylindrical cavity ", *Proc. R. Soc. Lond. A.*, Vol. 438, pp. 133-144, (1992).
7. Parnes, R., "Applied tractions on the surface of an infinite cylindrical bore ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, pp. 165-177, (1982).

8. Parnes, R., "Elastic response to a time-harmonic torsion-force acting on a bore surface ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 19, pp. 925-934, (1983).
9. Parnes, R. "On singularities due to a concentrated pressure loading of a cylindrical cavity ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, pp. 267-276, (1984).
10. Parnes, R., "Progressing torsional loads along a bore in an elastic medium ", *Int. J. Solids Structures* , Vol. 16, pp. 653-670, (1980).
11. Parnes, R., "Steady-state ring-load pressure on a bore hole surface ", *Int. J. Solids Structures*, Vol. 22, pp. 73-86, (1986).
12. Selberg, W. L., "Transient compression waves from spherical and cylindrical cavities ", *Ark. Fys.* , Vol. 5, pp. 97-108, (1952).
13. Sneddon, I.N., "*Fourier transforms*", McGraw-Hill: New York, 1st Edition, (1951).
14. Sneddon I.N., "Stress produced by a pulse of pressure moving along the surface of a semi-infinite solid", Rendiconti Circolo Mtematico di Palermo 2, pp. 57-62, (1952).
15. Westergaard, H.M., Theodore von karman Anniversary Volume, pp. 154-161, Caltech, (1941).

۱٦. خجسته، ع، رحیمیان، م و اسکندری قادی، م، «تحلیل سه‌بعدی محیط نیمه بی‌نهایت با رفتار ایزوتروپ جانبی تحت اثر بـار ممـاس بـر سطح در فضای فرکانسی»، نشریه‌ی دانشکده‌ی فنی، جلد ٤٠، شماره ٥، آبان (١٣٨٥).
۱۷. فرشاد، م، «ریاضیات عالی مهندسی،»جلد دوم، انتشارات بعثت، چاپ اول، (١٣٦٧).